

LXIX олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 13 января 2022 года
XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найди все целочисленные значения n , при которых выполняется равенство $(n^2 + 2n - 4)^{n+5} = 1$.

2. а) Найди сумму $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}$ зная, что разности между последовательными членами образуют ряд чисел: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., причем $a_0 = 0$.

б) Дана последовательность чисел: $b_0; b_1; b_2; \dots; b_{2022}$, в которой разности между последовательными членами образуют ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., причем $a_0 = 0$. Найди b_{2022} .

3. Реши неравенство: $\log_{x+3}(x^2 - 6) \geq 2$.

4. На доске записаны числа: 1, 2, 3, ..., 2022. Юку играет в игру, по правилам которой за один ход он может стереть с доски два числа и вместо них записать на доске среднее арифметическое стертых чисел. Например, если стереть с доски числа 1 и 2, то вместо них следует записать 1,5, или если стереть с доски числа 1 и 3, то вместо них надо записать 2. Эти действия выполняются до тех пор, пока на доске не останется только одно число. Найдется ли такая последовательность ходов, при которых последним записанным на доске числом будет
а) число 2?
б) число 999?

5. Количество жидкости в конусообразном сосуде не меняется. Если сосуд установить на основание, то расстояние от вершины конуса до верхнего уровня жидкости равно 8 см. Если сосуд установить основанием вверх, то расстояние от основания конуса до верхнего уровня жидкости равно 2 см. Найдите высоту данного конуса.

